

Gueorgui Smirnov, Vladimir Bushenkov

# Curso de Optimização

Programação Matemática, Cálculo de Variações,  
Controlo Óptimo



ESCOLAR EDITORA

Este texto foi escrito para estudantes de cursos de Matemática Aplicada e Engenharia que estudam Optimização. Foram incluídos no livro só os conceitos e resultados importantes nas aplicações.

A ênfase foi dada às condições necessárias de primeira ordem, aos teoremas de existência e aos métodos numéricos que formam a base para a resolução dos problemas práticos. A maior parte do livro é acessível aos alunos que adquiriram os conhecimentos básicos da Análise Real, da Álgebra Linear e da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. A matéria é completada por vários exercícios (resolvidos e não resolvidos), que ajudam a aprender melhor a teoria e a elaborar a técnica necessária à resolução de problemas práticos.

O livro contém um CD-ROM com trabalhos práticos que ajudam o leitor a perceber melhor como funcionam os métodos numéricos de optimização e também a resolver os problemas de optimização que o próprio leitor pode encontrar na sua actividade profissional.

#### Os autores :

Gueorgui Smirnov, é doutorado em Matemática pela Universidade Estatal de Moscovo. Trabalho durante vários anos na Academia Russa de Ciências em Moscovo.

Actualmente é Professor do Departamento de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. É autor de diversos artigos sobre Análise, Equações Diferenciais e Teoria de Controlo bem como dos livros "Stabilization Problems with Constraints: Analysis and Computational Aspects", Gordon and Breach, 1997 (juntamente com V. Bushenkov), "Introduction to the theory of Differential Inclusions", Graduate Studies in Mathematics, Vol. 41, American Mathematical Society, 2002, "Análise Complexa e Aplicações", Escolar Editora, 2003, "Curso de Análise Linear", Escolar Editora, 2003.

Vladimir Bushenkov, é doutorado em Matemática pelo Instituto Superior de Física e Técnica em Moscovo, cidade onde trabalhou durante anos na Academia Russa de Ciências. Actualmente é Professor do Departamento de Matemática da Universidade de Évora. É autor de vários artigos sobre Matemática Computacional e dos livros "Stabilization Problems with Constraints: Analysis and Computational Aspects", Gordon and Breach, 1997 (juntamente com G. Smirnov), "Computer Search for Balanced Decision", Nauka, 1997 (juntamente com A. Lotov, G. Kamenev e O. Chernykh), "Feasible Goals Method. Mathematical Foundations and Environmental Applications", Edwin Mellen Press, 1999 (juntamente com A. Lotov e Kamenev), "Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier", Kluwer, 2004 (juntamente com A. Lotov e G. Kamenev).



ESCOLAR EDITORA

[www.escolar-editora.com](http://www.escolar-editora.com)

ISBN 972-592-175-5



9 789725 921753

**Gueorgui Smirnov, Vladimir Bushenkov**

# **Curso de Optimização**

Programação Matemática, Cálculo de Variações  
Controlo Ótimo



**ESCOLAR EDITORA**

**Título: Curso de Optimização**  
*Programação Matemática, Cálculo das Variações, Controlo Ótimo*

**Autor: Gueorgui Smirnov**  
Vladimir Bushenkov

*Copyright © by Escolar Editora 2005*  
Rua do Vale Formoso, 37 1949-013 LISBOA  
Tel +351 218 681 183 Fax +351 218 685 012  
e-mail: dinternal@dinternal.pt Portugal

*Proibida a reprodução total ou parcial deste livro  
sem a autorização expressa do editor.  
Todos os direitos reservados.*

**Capa:**  
Tiago Oliveira  
*Designer Gráfico da Editora*

**Execução Gráfica:**  
JMM-Artes Gráficas, Lda.

**Impressão e acabamento:**  
Fernando Silva Miguel

ISBN 972-592-175-5

Depósito Legal n.º 210195/04

**Distribuição**  
**DINTERNAL, Lda.**

**LISBOA:** Rua do Vale Formoso, 37 1949-013 LISBOA  
Telef.: +351 218 681 183 Fax + 351 218 681 257  
E-mail: dinternal@dinternal.pt Portugal  
**PORTO:** Rua José Falcão, 188-1º 4050-315 PORTO  
Telef.: +351 223 322 232 Fax +351 222 008 050  
E-mail: britanica.por@dinternal.pt Portugal

# Prefácio

Este texto foi escrito para estudantes de cursos de Matemática Aplicada e Engenharia que estudam Optimização, o que explica a escolha da matéria e o nível de generalidade da apresentação. Foram incluídos no livro só os conceitos e resultados importantes nas aplicações, e as demonstrações foram feitas sem tentar atingir a máxima generalidade. No livro consideram-se as partes de Optimização que já se tornaram "clássicas": Programação Matemática, Cálculo das Variações e Controlo Óptimo. Os ramos que ainda estão na etapa do seu activo desenvolvimento, tais como Optimização Global, Cálculo das Variações em espaços multidimensionais, Controlo Óptimo para equações em derivadas parciais e equações estocásticas, Teoria Geométrica de Controlo e muitos outros, onde a perfeição final ainda não foi atingida, ficaram fora do livro. A maior atenção foi dada às condições necessárias de primeira ordem, aos teoremas de existência e aos métodos numéricos que formam a base para a resolução dos problemas práticos. No livro não se utiliza a técnica da Análise Funcional, tradicional na Optimização moderna. As demonstrações de todas as condições necessárias utilizam o método das aproximações: o problema original é aproximado por uma família de problemas mais simples. Isto dá a possibilidade de simplificar as demonstrações e de tornar acessível a maior parte da matéria aos alunos que adquiriram os conhecimentos básicos da Análise Real, da Álgebra Linear e da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. O livro contém um CD-ROM com trabalhos práticos que ajudam o leitor a perceber melhor como funcionam os métodos numéricos de optimização. Para execução destes trabalhos é necessário um computador com o sistema operativo "Windows". O CD-ROM incluído no livro dá a possibilidade não só de fazer os trabalhos práticos, mas também de resolver os problemas de optimização que o próprio leitor pode encontrar na sua actividade profissional.

O livro contém oito capítulos. No primeiro capítulo apresentam-se as ideias principais de Optimização: condições necessárias e suficientes de mínimo, Princípio de Lagrange, Princípio de Máximo de Pontriagin. Enunciam-se e explicam-se ao nível qualitativo os principais resultados, demonstrados formalmente nos três capítulos seguintes. A matéria destes três capítulos é completada por vários exercícios (resolvidos e não resolvidos), que ajudam a aprender melhor a teoria e a elaborar a técnica necessária

à resolução de problemas práticos. No quinto capítulo consideram-se questões fundamentais de existência de soluções dos problemas de Controlo Ótimo. Este capítulo é destinado a um leitor mais preparado. São indispensáveis conhecimentos da teoria de integral de Lebesgue e da teoria de funções absolutamente contínuas. A matéria necessária para ler este capítulo está recolhida no Capítulo 8. O sexto capítulo é dedicado a uma introdução aos métodos numéricos. Numa forma qualitativa e muitas vezes informal explica-se como funcionam os algoritmos principais de Optimização. O sétimo capítulo contém instruções para trabalhos práticos. É aconselhável começar a leitura do livro pela primeira secção do último capítulo, que contém as notações principais utilizadas no texto.

Este texto é uma introdução à Optimização. Ao leitor interessado em conhecer os resultados mais profundos desta parte de Matemática podemos recomendar os seguintes livros: *Alexéev V., Tikhomirov V., Fomine S., Commande Optimale*, Mir, 1982, *Ben-Israel A., Ben-Tal A., Zlobec S., Optimality in Nonlinear Programming: A Feasible Directions Approach*, Wiley, 1981, *Boltyanskii V., Mathematical Methods of Optimal Control*, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971, *Evtushenko Yu., Numerical Optimization Techniques. Optimization Software, Inc.*, 1985, *Fiacco A., McCormick G., Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, 1968, *Fleming W., Rishel R., Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, 1975, *Gamkrelidze R., Principles of Optimal Control Theory*. Plenum Press, 1978, *Lee E., Markus L., Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, 1967, *Mangasarian O., Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, 1969, *Nocedal J., Wright S., Numerical Optimization*, Springer, 2000, *Polak E., Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, 1971, *Pontriaguine L., Boltianski V., Gamkrelidze R., Michtchenko E., Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Mir, 1974.

Na preparação do curso foi utilizado o livro de *Alekseev V., Galeev E., Tikhomirov V., Livro de Exercícios de Optimização*. Nauka, 1984. Este excelente livro está disponível só em Russo; dele foi tirada a maior parte dos exercícios incluídos no curso. Na preparação dos trabalhos práticos foi muito útil aos autores a experiência adquirida ao longo dos anos de trabalho no Centro de Computação da Academia Russa de Ciências, sob a orientação de Yuori Evtushenko.

Os autores agradecem a Alessandro Margheri, Fernando Lobo Pereira, Francisco Miranda, José Basto Gonçalves e Maria do Carmo Guedes pelas sugestões e comentários ao texto. Agradecimentos especiais a Isabel Rodrigues pela sua ajuda na preparação deste texto. Algumas partes deste livro existiram durante vários anos na forma de "Folhas de apoio", e muitos alunos da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e da Universidade de Évora indicaram vários erros e omissões. Os autores agradecem a todos eles.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Prefácio</b>                                      | <b>5</b>  |
| <b>1 Introdução</b>                                  | <b>11</b> |
| 1.1 Problemas de Optimização                         | 11        |
| 1.2 Programação Matemática                           | 30        |
| 1.3 Cálculo das Variações. Problema de Lagrange      | 35        |
| 1.4 Controlo Ótimo                                   | 46        |
| <b>2 Programação Matemática</b>                      | <b>53</b> |
| 2.1 Enunciado do problema                            | 53        |
| 2.2 Existência de soluções                           | 53        |
| 2.3 Minimização sem restrições                       | 54        |
| 2.4 Regra dos Multiplicadores de Lagrange            | 56        |
| 2.5 Exercícios resolvidos                            | 57        |
| 2.6 Exercícios                                       | 60        |
| 2.7 Soluções dos exercícios                          | 61        |
| <b>3 Cálculo das Variações. Problema de Lagrange</b> | <b>63</b> |
| 3.1 Problema elementar do Cálculo das Variações      | 63        |
| 3.2 Equação de Euler-Lagrange                        | 64        |
| 3.3 Alguns exemplos                                  | 66        |
| 3.4 Problema de Lagrange                             | 68        |
| 3.5 Condições necessárias de mínimo                  | 69        |
| 3.6 Alguns casos particulares                        | 74        |
| 3.7 Exercícios resolvidos                            | 77        |
| 3.8 Exercícios                                       | 83        |
| 3.9 Soluções dos exercícios                          | 84        |
| <b>4 Controlo Ótimo</b>                              | <b>87</b> |
| 4.1 Enunciado do problema                            | 87        |
| 4.2 Condições necessárias de mínimo                  | 88        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.3      | Problema do tempo mínimo . . . . .                            | 93         |
| 4.4      | Controlos mensuráveis . . . . .                               | 96         |
| 4.5      | Exercícios resolvidos . . . . .                               | 98         |
| 4.6      | Exercícios . . . . .  | 104        |
| 4.7      | Soluções dos exercícios . . . . .                             | 105        |
| <b>5</b> | <b>Existência do controlo óptimo</b>                          | <b>107</b> |
| 5.1      | Inclusões diferenciais . . . . .                              | 107        |
| 5.2      | Uma breve introdução à análise multívoca . . . . .            | 108        |
| 5.3      | Soluções de inclusões diferenciais . . . . .                  | 111        |
| 5.4      | Sistemas de controlo. Existência do controlo óptimo . . . . . | 116        |
| 5.5      | Problema do tempo mínimo para um sistema linear . . . . .     | 123        |
| 5.6      | Resolução de alguns problemas . . . . .                       | 128        |
| 5.6.1    | Problema da Braquistócrona . . . . .                          | 128        |
| 5.6.2    | Problema da superfície de rotação de área mínima . . . . .    | 130        |
| 5.6.3    | Forma da corda pendurada . . . . .                            | 132        |
| 5.6.4    | Problema de Dido . . . . .                                    | 135        |
| 5.6.5    | Problema de arrefecimento uniforme . . . . .                  | 138        |
| <b>6</b> | <b>Métodos numéricos de optimização</b>                       | <b>149</b> |
| 6.1      | Métodos numéricos de Programação Matemática . . . . .         | 149        |
| 6.1.1    | Minimização de funções de uma variável . . . . .              | 149        |
| 6.1.2    | Minimização sem restrições . . . . .                          | 151        |
| 6.1.3    | Minimização com restrições . . . . .                          | 158        |
| 6.2      | Aproximações de problemas de Controlo Óptimo . . . . .        | 160        |
| 6.2.1    | Método de funções de penalização . . . . .                    | 161        |
| 6.2.2    | Aproximações discretas . . . . .                              | 162        |
| 6.3      | Métodos numéricos de Controlo Óptimo . . . . .                | 165        |
| 6.3.1    | Cálculo das derivadas . . . . .                               | 165        |
| 6.3.2    | Derivação automática . . . . .                                | 166        |
| <b>7</b> | <b>Trabalhos práticos utilizando o computador</b>             | <b>169</b> |
| 7.1      | Como otimizar . . . . .                                       | 169        |
| 7.1.1    | Problemas de Programação Matemática . . . . .                 | 169        |
| 7.1.2    | Problemas de Controlo Óptimo . . . . .                        | 175        |
| 7.2      | Como escrever e compilar os programas . . . . .               | 188        |
| 7.2.1    | Problemas de Programação Matemática . . . . .                 | 188        |
| 7.2.2    | Problemas de Controlo Óptimo . . . . .                        | 191        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>8</b> | <b>Suplementos matemáticos</b>                                    | <b>197</b> |
| 8.1      | Generalidades   | 197        |
| 8.1.1    | Notações  | 197        |
| 8.1.2    | Conjuntos convexos  | 199        |
| 8.1.3    | Teorema do valor médio para funções vectoriais                    | 201        |
| 8.1.4    | Derivação dos integrais paramétricos                              | 202        |
| 8.1.5    | Fórmula de Dirichlet  | 203        |
| 8.2      | Suplementos da teoria de funções                                  | 204        |
| 8.2.1    | Teorema de Arzela-Ascoli  | 204        |
| 8.2.2    | Funções mensuráveis   | 205        |
| 8.2.3    | Integral de Lebesgue  | 206        |
| 8.2.4    | Medida de Lebesgue  | 213        |
| 8.2.5    | Integração no sentido de Riemann                                  | 215        |
| 8.2.6    | Teorema de Lusin  | 217        |
| 8.2.7    | Derivação e integração de funções monótonas                       | 218        |
| 8.2.8    | Funções absolutamente contínuas                                   | 222        |
| 8.3      | Equações diferenciais   | 226        |
| 8.3.1    | Problema de Cauchy  | 226        |
| 8.3.2    | Desigualdade de Gronwall e unicidade                              | 226        |
| 8.3.3    | Existência  | 228        |
| 8.3.4    | Métodos numéricos   | 232        |
| 8.3.5    | Equações diferenciais lineares                                    | 235        |
| 8.3.6    | Função exponencial  | 236        |
| 8.3.7    | Solução geral da equação diferencial de coeficientes constantes   | 239        |
| 8.3.8    | Dependência contínua das condições iniciais e dos parâmetros      | 241        |
| 8.3.9    | Dependência diferenciável das condições iniciais e dos parâmetros | 242        |
|          | <b>Lista de Notações</b>  | <b>245</b> |
|          | <b>Índice Alfabético</b>  | <b>245</b> |